A ϱ-MINTAFÜGGVÉNYEK FUNKCIONÁLIS TELJESSÉGE

VÁRMONOSTORY ENDRE

1. *Bevezetés.* Ebben a dolgozatban véges halmazon értelmezett műveletekkel foglalkozunk. „Művelet" helyett — az ilyen vizsgálatok során kialakult gyakorlatnak megfelelően — a továbbiakban „függvényt" fogunk írni. Azt fogjuk vizsgálni, hogy az alaphalmazon értelmezett bizonyos függvényből vagy függvényekből, továbbá az identikus és a konstans függvényekből előállítható-e az ott értelmezett összes függvény összetett függvényként. Az egyszerűség kedvéért legyen az alaphalmaz $H=\{0, 1, \ldots, n-1\}$ és $n>2$. Először a legfontosabb definíciókat ismertetjük.

Nevezzük az f függvényt *funkcionálisan teljes*nek vagy *függvényteljes*nek a H halmazon, ha belőle, és az egyváltozós konstans függvényekből, valamint a projekciókból minden, a H-n értelmezett függvény összetett függvény képzéssel előállítható. Azt is mondhatjuk ilyenkor, hogy a $\langle H; f\rangle$ algebra — azaz a H alaphalmazú és f műveletű algebrai struktúra — funkcionálisan teljes.

Jelöljük P_n-nel a H halmazon értelmezett összes függvények halmazát. Legyen M a P_n egy részhalmaza. M *lezárásá*nak nevezzük a P_n-ből vett összes olyan függvények $[M]$ halmazát, amelyek kifejezhetők összetett függvény képzéssel az M elemeiből és a projekciókból. Az M függvényhalmazt *zárt halmaz*nak vagy *klón*nak nevezzük, ha $[M]=M$. A H halmazon értelmezett függvényekből álló $\{f_1, f_2, \ldots\}$ halmaz teljes, ha $[\{f_1, f_2, \ldots\}]=P_n$. Az előbbiek szerint az f függvény pontosan akkor függvényteljes, ha $[f, c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}]=P_n$, ahol $c_0=0, \ldots, c_{n-1}=n-1$ az egyváltozós konstans függvények.

Akkor mondjuk, hogy f a H halmazon értelmezett k-változós f függvény *tiszteli* az ugyanott értelmezett kétváltozós ϱ relációt, ha valahányszor $a_1\varrho b_1, \ldots, a_k\varrho b_k$, mindannyiszor $f(a_1, \ldots, a_k)\varrho f(b_1, \ldots, b_k)$.

A következő definíció CSÁKÁNY BÉLÁtól származik: Az $\langle a_1, \ldots, a_k\rangle$, és a $\langle b_1, \ldots, b_k\rangle$ ($\in H^k$) elem-k-as *azonos mintájú* a kétváltozós ϱ relációra nézve, ha minden (i, j) $(1\leqq i, j\leqq k)$ párra $a_i\varrho a_j$ akkor és csak akkor ha $b_i\varrho b_j$.

Egy k változós f függvényt ϱ*-mintafüggvény*nek nevezünk, ha

a) bármely $\langle x_1, x_2, \ldots, x_k\rangle$ esetén $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)=x_i$ $(1\leqq i\leqq k)$,

b) valahányszor $\langle x_1, x_2, \ldots, x_k\rangle$ és $\langle y_1, y_2, \ldots, y_k\rangle$ azonos mintájú ϱ-ra nézve, mindannyiszor $f\, y_1, y_2, \ldots, y_k)=y_i$.

Egy ϱ-mintafüggvény értéke tehát mindig egyenlő valamelyik változója értékével; és az, hogy hányadik változója értékével egyenlő, csak a változók értékeinek ϱ-ra vonatkozó mintájától függ.

A H halmaz a eleme *karakterisztikus függvényé*n azt a χ_a egyváltozós függvényt értjük, amely H-nak az a elemén az 1, a többi elemén pedig a 0 értéket veszi fel.

2. *Teljességi tételek.* PIXLEY nevéhez fűződik a következő, bármely halmazon értelmezhető t függvény, az ún. *ternáris diszkriminátor* vizsgálata:

$$t(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \neq y, \\ z, & \text{ha } x = y. \end{cases}$$

WERNER [4] bebizonyította, hogy ez a függvény bármely véges halmazon funkcionálisan teljes.

FRIED és PIXLEY [2] vizsgálták az ún. *duális diszkriminátort*, amelyenk definíciója:

$$d(x, y, z) = \begin{cases} z, & \text{ha} \quad x \neq y, \\ x, & \text{ha} \quad x = y. \end{cases}$$

Bebizonyították, hogy a duális diszkriminátor is funkcionálisan teljes, ha az alaphalmaz véges és legalább három elemű.

Mindkét diszkriminátor-függvény olyan ϱ-mintafüggvény, ahol ϱ egyenlőség-reláció. A két diszkriminátor függvényre vonatkozó eredményt CSÁKÁNY [1] tétele általánosítja, amely szerint legalább három elemű véges halmazon bármely ϱ-mintafüggvény függvényteljes, ha ϱ egyenlőség-reláció.

A következőkben a WERNER-, ill. a FRIED—PIXLEY-féle eredmény megfelelőit bizonyítjuk néhány további relációra. Bizonyításaink a következő tételen alapulnak:

Kifejtési tétel (WILLE [5], WERNER [4]). Ha $\wedge$ és $\vee$ olyan kétváltozós művelet H-n, hogy minden $a(\in H)$-ra teljesül

$$a \wedge 1 = a, \quad a \wedge 0 = 0, \quad a \vee 0 = a = 0 \vee a,$$

akkor a $\{\wedge, \vee, \chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_{n-1}, c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}\}$ halmaz teljes.

3. **A ϱ-mintafüggvények függvényteljessége.** A funkcionális teljesség kérdését olyan ϱ-mintafüggvénynél vizsgáljuk, ahol ϱ permutáció, lineáris rendezés, részhalmaz- vagy ekvivalencia-reláció. A ternáris és a duális diszkriminátorra vonatkozó eredményeket átvisszük tetszőleges permutációra és lineáris rendezésre.

1. Tétel. *Ha ϱ tetszőleges permutáció a H halmazon, akkor az*

$$f(x, y, z) = \begin{cases} z, & \text{ha} \quad x\varrho y, \\ x & \text{különben} \end{cases}$$

függvény függvényteljes H-n.

Bizonyítás. A kifejtési tétel szerint elegendő definiálnunk a H halmazon a kifejtési tételben felsorolt tuljdonságokkal rendelkező $\wedge$ és $\vee$ függvényt, valamint az elemek karakterisztikus függvényeit.

Legyen $x \wedge y = f(y, s_1, x)$, ahol $s_1 (\in H)$-re $1 \varrho s_1$ teljesül. Most $a \wedge 1 = a$ és $a \wedge 0 = 0$ teljesül minden $a(\in H)$-ra. Továbbá legyen $x \vee y = f(x, s_0, y)$, ahol $0 \varrho s_0$ teljesül. Így $a \vee 0 = a = 0 \vee a$ érvényes minden $a(\in H)$-ra.

Minden $a(\in H)$-ra definiáljuk a χ_a karakterisztikus függvényt. Ha $a \neq 0$, akkor legyen

$$\chi_a(x) = f(f \ldots f(f(\ldots f(f(f(x, s_1, 0), s_2, 0), s_3, 0) \ldots, s_{a-1}, 0),$$
$$s_{a+1}, 0), \ldots, s_{n-1}, 0), s_a, 1).$$

Ha $a = 0$, akkor legyen

$$\chi_a(x) = f(f(f(f(\ldots f(f(x, s_2, 1), s_3, 1) \ldots, s_{n-1}, 1), s_0, 2), s_1, 0), s_2, 1),$$

ahol $0 \varrho s_0$, $1 \varrho s_1$, $\ldots$, $(n-1) \varrho s_{n-1}$ érvényes.

2. Tétel. *Ha ϱ tetszőleges permutáció a H halmazon, akkor a*

$$g(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{ha} \quad x\varrho y, \\ z & \text{különben} \end{cases}$$

függvény funkcionálisan teljes H-n.

Bizonyítás. A bizonyításnál szintén a kifejtési tételt használjuk fel. A szükséges kétváltozós műveletek definíciója:

$$x \wedge y = g(y, s_0, x),$$
$$x \vee y = g\big(x, s_1, g\big(x, s_2, g\big(x, s_3, \ldots, g(x, s_{n-1}, y)\ldots\big)\big)\big).$$

Ekkor $a \wedge 1 = a$, $a \wedge 0 = 0$ és $a \vee 0 = a = 0 \vee a$ teljesül minden $a(\in H)$-ra.
A karakterisztikus függvényt pedig így adjuk meg:

$$\chi_a = \begin{cases} g\big(g(x, s_a, 0), s_0, 1\big) & \text{ha} \quad a \neq 0, \\ g\big(g\big(g\big(g(x, s_0, 1), s_1, 2\big), s_2, 0\big), s_0, 1\big), & \text{ha} \quad a = 0. \end{cases}$$

Megjegyzés. Nem minden ϱ-mintafüggvény függvényteljes, ha ϱ nem identikus permutáció. Bebizonyítható például, hogy az

$$m(x, y) = \begin{cases} x, & \text{ha} \quad x\varrho y, \\ y & \text{különben} \end{cases}$$

függvény a H halmazon nem függvényteljes, ha $\varrho = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & \ldots & n-1 \end{pmatrix}$.

Legyen ϱ a közönséges $\geqq$ lineáris rendezés. Ekkor érvényes a következő tétel:
3. **Tétel.** *Tetszőleges H halmazon a*

$$h(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{ha} \quad x \geqq y, \\ z & \text{különben} \end{cases}$$

függvény függvényteljes.
Bizonyítás. A kifejtési tételben szereplő föggvényeket most a következőképpen adhatjuk meg:

$$x \wedge y = h(0, y, x); \qquad x \vee y = h(x, y, y).$$

A karakterisztikus függvény megadása pedig a következő:

$$\chi_a(x) = \begin{cases} h\big(0, h\big(h\big(h(a-1, x, a), a, 0\big), h(x, a, 0), h(a, x, 0)\big), 1\big), \\ \text{ha} \quad a \neq 0, \\ h\big(1, h\big(0, h(0, x, 1), 2\big), 0\big), \quad \text{ha} \quad a = 0. \end{cases}$$

4. **Tétel.** *Tetszőleges H halmazon a*

$$p(x, y, z) = \begin{cases} z, & \text{ha} \quad x \geqq y \\ y & \text{különben} \end{cases}$$

függvény függvényteljes.
Bizonyítás. Most a $\wedge$ függvényt a következő módon adjuk meg:

$$x \wedge y = \begin{cases} p\big(y, p(x, 0, y), 0\big) & \text{ha} \quad x = 0, \quad y \text{ tetszőleges}, \\ p(x, 1, y), & \text{ha} \quad x = 1, \quad y \text{ tetszőleges} \\ p\big(1, p(y, 1, x), 0\big), & \text{ha} \quad x \geqq 2, \quad y \text{ tetszőleges}. \end{cases}$$

Legyen továbbá $x \vee y = p(x, y, x)$.
Könnyen ellenőrizhető, hogy $a \wedge 0 = 0$, $a \wedge 1 = a$, $a \vee 0 = a = 0 \vee a$ teljesül minden $a(\in H)$-ra.

A karakterisztikus függvényt így adjuk meg:

$$\chi_a(x) = \begin{cases} p(x, 1, 0), & \text{ha} \quad a = 0, \\ p(p(1, x, 0), x, 0), & \text{ha} \quad a = 1, \\ p(p(p(a-1, p(p(a, x, 0), x, 0), 0), 1, 0), 1, 0), & \text{ha} \quad a \geqq 2. \end{cases}$$

A bizonyítás kész.

5. Tétel. *Ha ϱ olyan ekvivalaneciareláció a H halmazon, amely nem egyenlőségreláció, akkor egyetlen ϱ-mintafüggvény sem függvényteljes.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy ϱ nem teljes reláció. A konstansok és az identikus függvény tisztelik a ϱ ekvivalencia-relációt. Másrészt a ϱ-mintafüggvények is tisztelik a ϱ ekvivalencia-relációt. A ϱ-t tisztelő függvényekből képzett összetett függvények szintén tisztelik ϱ-t. Tehát ϱ-mintafüggvényekből, a konstansokból és az identikus függvényből ϱ-t nem tisztelő függvények nem állnak elő.

Ha ϱ teljes reláció, akkor a ϱ-mintafüggvények projekciók lesznek. Projekciókból, konstansokból és az identikus függvényből szintén nem rakható össze az összes függvény.

6. Tétel. *Ha ϱ tetszőleges részhalmaz reláció a H halmazon, akkor egyetlen ϱ-mintafüggvény sem függvényteljes.*

Bizonyítás. a) Ha a ϱ részhalmaz üres vagy maga a H halmaz, akkor a ϱ-mintafüggvények projekciók lesznek. Ekkor tehát egy ϱ-mintafüggvény sem függvényteljes.

b) Ha ϱ nem a H halmaz, de van két különböző eleme: a és b, míg $c \notin \varrho$, akkor egy $f(x)$ ϱ-mintafüggvényből, konstansokból és a projekciókból nem tudunk olyan $F(x)$ függvényt előállítani, amelyre $F(b)=a$, $F(a)=c$ vagy $F(a)=b$. Ez $f(x)$-nek az $F(x)$-ben való előfordulási száma szerinti teljes indukcióval adódik.

c) Ha ϱ egyetlen eleme, a, míg b és c ϱ-n kívüli különböző elemek, akkor egy $f(x)$ ϱ-mintafüggvényből, a konstansokból és a projekciókból nem tudunk olyan $F(x)$ függvényt előállítani, amelyre $F(b)=a$, $F(c)=c$ vagy $F(c)=b$. Ezt is $f(x)$-nek az $F(x)$-ben való előfordulási száma szerinti teljes indukcióval kapjuk.

IRODALOM

[1] B. CSÁKÁNY: Homogeneus algebras are functionally complete, Algebra Universalis (megjelenés alatt),

[2] E. FRIED, A. F. PIXLEY: The dual discriminator function in universal algebra, Acta Sci. Math. 41/1979, 83—100.

[3] E. VÁROSMONOSTORY: Relational pattern functions, „Finite Algebra and Many-valued Logic" Coll. Math. Soc. János Bolyai, Vol. 28, 1981. (megjelenés alatt).

[4] H. WERNER: Diskriminator-Algebras, Akademie-Verlag, Berlin, 1978.

[5] R. WILLE: Allgemeine Algebra — zwischen Grundlagenforschung und Anwendbarkeit (Preprint).

ÜBER DIE FUNKTIONAL VOLLSTÄNDIGKEIT VON ϱ-MUSTERFUNKTIONEN

E. VÁRMONOSTORY

Der Begriff der ϱ-Musterfunktion wird folgender Weise definiert: Die k-tupel $\langle a_1, \dots a_k \rangle$, $\langle b_1, \dots, b_k \rangle$ $(\in H^k)$ háben dasselbe Muster für eine binäre Relation ϱ, wenn für jedes Paar (i, j) $(1 \leq i,\ j \leq k)$ $a_i \varrho b_j$ und $a_j \varrho b_j$ einander gegenseitig bestimmen. Eine Funktion $f: H^k \to H$ heisst ein ϱ-Musterfunktion, weenn $f(x_1, \dots, x_k) = x_i$ $(1 \leq i \leq k)$, wo i nur von dem ϱ-Muster von $\langle x_1, \dots, x_k \rangle$ hängt.

Die Resultate von Werker Fried und Pixley werden verallgemeinert. Die funktional Vollständigkeit der Algebra $(H; f)$ wird bewiesen, falls ϱ eine Permutation oder eine lineare Ordnung bedeutet. Ist anderseits ϱ eine Äquivalenz oder eine Untermengerelation, dann ist $(H; f)$ nicht funktional vollständig.

О ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ПОЛНОТЕ ϱ-ТРАФАРЕТНЫХ ФУНКЦИЙ

Э. ВАРМОНОШТОРИ

Пусть даны $\langle a_1, \dots, a_k \rangle$ и $\langle b_1, \dots, b_k \rangle \in H^k$ а также отношение ϱ на множестве H. Мы их называем последовательностями одинакового типа по отношению ϱ, если для каждой пары (i, j), где $1 \leq i, j \leq k$, $a_i \varrho a_j$ тогда и только тогда если $b_i \varrho b_j$. Функцию f от k переменных мы называем ϱ-трафаретной функцией если при любых $x_1, \dots, x_n$ имеет место $f(x_1, \dots, x_k) = x_i$ $(1 \leq i \leq k)$ где i зависит от $x_1, \dots, x_n$ таким образом, что $f(y_1, \dots, y_n) = y_i$ с тем же i всякий раз когда $\langle x_1, \dots, x_k \rangle$, $\langle y_1, \dots, y_k \rangle$ одинакового типа относительно отношения ϱ.

Доказывается функциональная полнота некоторых алгебр вида $\langle H_i\ f \rangle$, где $2 < |H| < \infty$, функция ϱ-трафаретная на множестве H, а ϱ-частичное упорядочение, подстанока, и т. п. Обобщаются известные результаты Вернера и Фрида—Пиксли, относящиеся к случаю, когда ϱ является отношением равенства.